УДК 519.6 + 630.187

С.В. Чернышенко

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ ЛЕСНОЙ РЕКУЛЬТИВАЦИИ НАРУШЕННЫХ ЗЕМЕЛЬ

С.В. Чернишенко
Дніпропетровський національний університет

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІНННЯ ПРОЦЕСАМИ ЛІСОВОЇ РЕКУЛЬТИВАЦІЇ ПОРУШЕНИХ ЗЕМЕЛЬ

Розглядаються проблеми, пов'язані з використанням у рекультиваційних роботах методів математичної теорії оптимізації. Основне застосування методики – вирішення задачі оптимізації витрат на рекультивацію лісових біогеоценозів у степовій зоні. Описуються різні постановки задач управління: про мінімальні витрати, максимальну швидкодію, максимальну ефективність.

Ключові слова: рекультивація, біогеоценоз, оптимальне керування, математична модель.

S.V. Chernyshenko
Dnipropetrovsk National University

OPTIMAL CONTROL APPROACH FOR FOREST RECULTIVATION OF DESTRUCTED LANDSCAPE

Problems of use of mathematical optimisation methods in recultivation are considered. The main application of the approach is the problem of optimal inputs for forest recultivation in the step zone. The following target settings of optimal control problem will be discussed: minimal inputs, optimal operating speed, maximal effectiveness.

Key words: recultivation, biogeocoenose, optimal control, mathematical model.

Постановка проблемы и ее актуальность

В настоящей статье рассматриваются вопросы использования в рекультивационных работах методов математической теории оптимизации. В качестве основного приложения приводится задача об оптимизации расходов на рекультивацию лесных биогеоценозов в степной зоне.

Общая схема оптимизационного подхода в самом широком смысле может быть такой. Некий субъект может «выбрать» один из нескольких (или бесчисленного множества) вариантов. Каждому из этих вариантов в конечном итоге можно дать числовую оценку, которую называют «качеством» (математики говорят о «критерии оптимальности», «критерии качества», «целевой функции» или «целевом функционале»). «Цель» объекта – выбрать «оптимальный» вариант, которому соответствует максимальное качество. В случае когда критерий оптимальности выбирает человек, для процесса оптимизации может быть применен термин «управление» (или «оптимальное управление»). Важно отметить, что кроме построения количественных методов оптимизационный подход обеспечивает базу для глубокого логического анализа эколого-экономических систем (Эндрэс, 1995).

Рассмотрение задач о рациональном природопользовании и, в частности, об экономических аспектах лесной рекультивации требует учитывания многих факторов. Это делает необходимым и актуальным развитие формальных математических методов, которые позволяют проводить качественный анализ сложных систем и получать интегральные показатели, используемые в ходе неформальных процедур принятия решений.

Обзор состояния проблемы

В экологии термин «оптимизация» вышел далеко за рамки научной лексики и применяется для определения любого позитивного вмешательства человека в природную среду. Распространение получил термин «оптимизация ландшафта» (Ван Рийн, 1981; Вопросы оптимизации ..., 1980), под которым понимается такое размещение на некоторой территории сельскохозяйственных угодий и природных БГЦ, при котором обеспечивается сохранение последних и одновременно максимальное, дешевое и долгосрочное производство сельхозпродукции (Миркин и др., 1989). Задача далека от строгости в математическом понимании: названы четыре разноплановых критерия, каждый из которых далек от формализации; не оговорены ограничения и т.д.

Содержательный анализ подобных постановок проведен в статье М.А. Голубца (1994), в которой справедливо отмечается, что «за сучасної доби формалізації і комп'ютеризації слід підвищити вимогливість науковців щодо використання термінів». Автор предлагает целый ряд терминов, близких к определению оптимизации, но более точных по смыслу: рационализация, гармонизация, окультуривание и др. С этой точкой зрения нельзя не согласиться. Корректнее говорить о «рациональном природопользовании» (Арманд, 1983), чем об «оптимальном природопользовании».

Одним из популярных направлений в математической экологии является эколого-экономическое моделирование. Оптимальность понимают, как правило, в смысле максимизации некоторых макроэкономических показателей при выполнении ряда ограничений на степень нарушения природной среды. Описание базируется либо на классических моделях макро- и микроэкономики, либо на глобальных моделях типа Д. Форрестера (1978). Акценты могут делаться на использовании теоретического философско-системного подхода (Тимченко и др., 1999) или серьезных математических методов (Ляшенко, 1999). Как правило, рассматриваются лишь глобальные экологические параметры, отражающие не биологические особенности рассматриваемых систем, а их природоохранную значимость. Экологический аспект (в строгом смысле этого слова) не является основным в этом разделе науки, который тяготеет скорее к экономике (или, при исследовании «мировых моделей», к глобалистике), чем к экологии.

Классическая теория управления применяется в математической экологии преимущественно к моделям, описывающим динамику одного или нескольких видов (Ляшенко, Мукоєд, 2002). Одним из первых, кто применил новую методику, был создатель теории динамического программирования Р. Беллман (1987). Наибольший вклад в развитие подхода внесли советские математики (Свирежев, Елизаров, 1972; Динамическая теория…, 1974). Элементы теории управления, ставшие частью теоретической экологии, используются для иллюстрации экологических принципов в большинстве современных руководств (Бигон и др., 1989; Одум, 1975).

Как и «эскизные» (Налимов, 1971) модели, положенные в их основу оптимизационные постановки этого типа могут дать некоторые качественные ориентиры и не претендуют на количественное решение реальных задач. Однако даже при использовании простейших моделей методы теории управления дают возможность получить неочевидные и полезные практические рекомендации (Свирежев, Елизаров, 1972). Не следует забывать, что оптимизационная задача имеет смысл лишь при адекватности используемой модели реальному процессу (причем именно в контексте поставленной задачи оптимизации), что предполагает развитие методологии построения моделей – как имитационных, так и эскизных.

«Целью» управления обычно является перевод системы из одного состояния в другое либо с минимальными затратами, либо за минимальное время. Автором статьи (Чернышенко, 1998) были предложены типичные постановки экологических задач управления.

Рассмотрим задачи оптимизации на примере лесной рекультивации нарушенных земель.

1. Общая постановка задачи оптимального управления рекультивацией

Ставится задача о применении методов теории оптимального управления к проблемам техногенной биогеоценологии или, точнее, к изучению рекультивации лесных биогеоценозов. Техногенная биогеоценология – часть науки об окружающей среде, которая направлена на изучение техногенного влияния на биогеоценозы и, в конечном счете, на условия человеческой жизни. Часть этой науки связана с проблемами защиты, возобновления и рекультивации естественных биогеоценозов, а также создания устойчивых и долговечных искусственных биогеоценозов. Техногенная биогеоценология основывается на системном анализе естественных процессов и включает математическое моделирование как важный инструмент исследования и анализа сложных систем, а также принятия решения. Особую остроту эффективное планирование и организация рекультивационных работ приобретает при воссоздании азональных биогеоценозов, как это имеет место в степном лесоведении (Бельгард, Травлеев, 1973; Травлеев, 1987).

Под понятием рекультивации можно понимать различные виды лесоустроительных работ (Етеревская, 1977; Крупеников, Холмецкий, 1979). В частности, это мелиоративные работы по спасению существующих биогеоценозов, подвергшихся радикальному антропогенному воздействию. Например, в результате проседания грунта в районе шахтных разработок происходит подтопление лесных БГЦ, и их спасение возможно лишь в случае проведения интенсивных дренажных работ (Таран, 1992).

Другой вид рекультивации состоит в создании искусственных БГЦ в ландшафтах с полностью уничтоженной биотой. Этот случай наблюдается в таких регионах Украины, как Западный Донбасс, угольные бассейны Александрии, Кривбасса и т. д. Экологическое состояние этих областей можно представить как локальную катастрофическую сукцессию. Полная рекультивация разрушенного ландшафта должна начинаться с создания почв с оптимальными (в соответствии с местными условиями) грануляцией, физическими, гидрологическими, воздушными, агрохимическими свойствами. Затем воссоздается автотрофная часть биогеоценоза. Автотрофная подсистема создает возможности для восстановления гетеротрофной части: животных и почвенного микробоценоза.

Таким образом, рекультивация заключается, во-первых, в проектировании и реальном формировании абиотических лесорастительных условий, необходимых для существования БГЦ (в первую очередь – структуры грунта и почвы); во-вторых, в проектировании и проведении лесопосадочных работ и внедрении выбранных видов растений, микроорганизмов и животных; и, в-третьих, в проведении лесокультурных мероприятий в ходе становления БГЦ (Дриженко, 1985).

С формально-логической точки зрения в рекультивации естественно выделять два вида мероприятий: непосредственно связанные с увеличением биомассы БГЦ (лесопосадочные работы, интродукция новых особей) и способствующие улучшению лесорастительных условий (мелиоративные работы и лесокультурные мероприятия). Кроме того, в отдельную категорию должны быть выделены предварительные работы по подготовке биотопа и почвенных условий (корректировка микрорельефа, создание подпочвенного и почвенного слоев и т.п.) Эти работы предшествуют воссозданию и развитию биогеоценоза и выходят за рамки динамических моделей БГЦ.

Поскольку рекультивация является, по сути, эколого-экономическим процессом, его модель должна отражать как экологические показатели БГЦ, так и экономические затраты на проведение рекультивации. Ниже будут использованы простейшие модели, описывающие динамику биогеоценоза: модель экспоненциального роста, логистическая модель, модель развития во враждебной среде. Хотя они дают лишь схематичное описание динамики БГЦ, все же интегральный учет динамики системы может существенно дополнить традиционные методы, базирующиеся на статической оценке текущего состояния БГЦ или биотопа.

При оптимизации процесса рекультивации нужно учитывать нетривиальное диалектическое взаимодействие между лесным биогеоценозом и лесорастительными условиями. Оценивая конечное состояние биогеоценоза, необходимо ориентироваться на классификацию, отражающую лесорастительные условия, классическим примером которой может служить классификация А.Л. Бельгарда (1950). В то же время роль играет и текущее состояние БГЦ, которое легче поддается типологическому изучению (Перлин, 1991). Важно, однако, понимать, что типологии, ориентированные на текущее состояние, не менее статичны, чем типологии «коренного» БГЦ, и при этом лишены прогностичности последних. Например, как показано в статье Л.П. Мыцыка (1991), классификация Л.Г. Раменского (Раменский и др., 1956), пропагандируемая С.И.Перлиным, отражает лишь текущее состояние БГЦ. Применение формальных статистических методов в духе теории «континуума» (Миркин, Розенберг, 1978), в некоторых отношениях развивающих идеи Л.Г. Раменского (1938), тоже может оказаться малопродуктивным. Наилучшим выходом было бы использование динамических моделей сукцессий (Чернышенко, 2001; 2002), позволяющих учесть особенности всех стадий становления БГЦ, что, однако, выходит за рамки настоящего исследования.

В качестве простейшей модели рекультивации рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = \left(u(t) - a(t)\right) \cdot x + v(t) \,, \tag{1}$$

которое будем рассматривать на промежутке времени [0,T] и дополним начальным условием

$$x(0) = x_0 . \qquad (2)$$

В качестве управляющих воздействий рассмотрим функции *v(t)* – интенсивность внедрения новых особей (в первую очередь в ходе лесопосадок) и *u(t)* – интенсивность работ по улучшению лесорастительных условий (мелиорация и/или лесокультурные мероприятия).

Функция *a(t)* описывает тенденцию развития искусственного БГЦ при отсутствии рекультивационной деятельности. Зависимость *a* от *t* может описывать, например, сезонные изменения лесорастительных условий. При рассмотрении задач управления процессами степного лесоразведения следует различать случаи:

I) $a(t) < 0$ – при отсутствии лесокультурных или мелиоративных работ в БГЦ имеют место выраженные регрессивные процессы.

II) $a(t) \equiv 0$ – при прекращении рекультивационных мероприятий наблюдается относительно устойчивое состояние БГЦ, который стабилизируется на уровне, достигнутом в ходе рекультивации.

III) $a(t) > 0$ – БГЦ может самовозобновляться и расширять свою территорию даже после прекращения рекультивационных работ.

Последний случай может иметь место при лесной рекультивации в условиях степной зоны лишь в некоторых интерзональных биотопах, например в поймах рек. Однако и в этих случаях значение коэффициента будет лишь незначительно превосходить ноль.

Основным требованием к динамике системы является достижение к моменту времени *T* некоторого заданного уровня

$$x(T) = x_T . \qquad (3)$$

Важным является вопрос выбора критерия качества. Например, может использоваться следующее линейное выражение:

$$I_1[u,v] = \int_0^T \left(|u(t)|\, x(t) + |v(t)| \right) dt . \qquad (4)$$

Первый подынтегральный член оценивает затраты на лесокультурные мероприятия (которые, естественно, пропорциональны объему имеющихся на текущий момент насаждений), а второй – на лесопосадочные работы. Значение функционала имеет размерность «количество особей» (или «биомасса»).

Отметим основные недостатки функционала (4). Во-первых, как легко понять, для случая $a(t) \equiv 0$ его значение будет постоянным для любого решения задачи (1) – (3) и будет составлять $x_T – x_0$. Таким образом, величина затрат определяется лишь требованиями к окончательному состоянию БГЦ и не зависит от различных «тактических» решений по его достижению, что, естественно, не соответствует реальной практике рекультивационных работ. Во-вторых, формула (4) нивелирует возможную разницу в трудоемкости двух видов рекультивации. В третьих, как это характерно для линейных критериев качества (Красовский, 1968), оптимальное управление может оказаться не непрерывным, а, например, кусочно-постоянным или же δ-функцией. Такое экстремальное поведение плохо соответствует инерционности реальных процессов управления.

Первые два недостатка могут быть устранены, если ввести в выражение (4) весовые коэффициенты для каждого вида рекультивационных работ:

$$I_2[u,v] = \int_0^T \left(\alpha_u |u(t)|\, x(t) + \alpha_v |v(t)| \right) dt . \qquad (5)$$

Для устранения третьего недостатка вместо линейного функционала может быть рассмотрено его квадратичное обобщение. В несколько упрощенной форме его можно записать следующим образом:

$$I_3[u,v,x] = \int_0^T \left(\alpha_{1u} u(t) + \alpha_{2u} u^2(t) + \alpha_{1v} v(t) + \alpha_{2v} v^2(t) + \alpha_x x(t) \right) dt . \qquad (6)$$

Экологический смысл функционала (6) не так очевиден, как выражение (5), хотя он и имеет достаточно общий вид. Последний подынтегральный член может интерпретироваться как затраты на поддержание существования БГЦ на достигнутом уровне, которые, естественно, пропорциональны наблюдаемой биомассе. Математически форма (6) более удобна, чем форма (5), и обеспечивает при $a_{1u} \neq 0$, $a_{2v} \neq 0$ непрерывный характер решений задачи. В целом функционал (6) качественно корректно отражает суть оптимизационной задачи.

Приведем также чисто квадратичный вид функционала (6), к которому во многих случаях он может быть сведен:

$$I_3[u,v] = \int_0^T \left(\alpha_u u^2(t) + \alpha_v v^2(t)\right) dt. \qquad (7)$$

Задачи (1) – (5) и (1) – (6) являются существенно нелинейными и не могут быть решены аналитически. Оптимальное решение может быть найдено одним из численных методов. Рассмотрим несколько более простых частных случаев, соответствующих отдельным видам рекультивационных работ.

2. Управление одномерной линейной моделью для случая рекультивации существующего биогеоценоза

Рассмотрим случай рекультивационных работ для существующего БГЦ, испытывающего локальную катастрофическую сукцессию (например, подтопленного в ходе проседания грунтов в районе шахтных разработок). В этом случае $v(t) \equiv 0$, т. е. посадки не проводятся, однако выполняются мелиоративные работы, т.е. управление можно описать с помощью функции $u(t)$. Рассмотрим случай I ($a(t) \equiv 0$), когда при отсутствии мелиорации развитие БГЦ прекращается.

Уравнение (1) приобретает вид

$$\dot{x} = u(t)\,x. \qquad (8)$$

Из выражений (8), (1) следует

$$\int_0^T u(t)\,dt = \ln\frac{x_T}{x_0}. \qquad (9)$$

Как уже отмечалось, критерий качества (4) (с которым в рассматриваемом случае совпадает и критерий (5)), при $a(t) \equiv 0$ не может быть использован, поскольку имеет постоянное значение:

$$\int_0^T u(t)x(t)\,dt = x_0 \int_0^T u(t)\, e^{\int_0^t u(\tau)\,d\tau} dt = x_0 \left(e^{\int_0^T u(t)\,dt} - 1 \right) = x_T - x_0 .$$

Поэтому выберем частный случай квадратичного критерия качества (7), при использовании которого говорят о задаче «с минимальной энергией»:

$$I_0[u] = \int_0^T u^2(t)\,dt . \qquad (10)$$

Хотя оптимальность по критерию (10) не вполне отражает ее понимание в исходной постановке задачи, все же он может позволить получить «рациональное» или «хорошее» решение, которое в реальной ситуации бывает вполне достаточным (Голубець, 1994).

Выбор квадратичного критерия значительно упрощает задачу. В соответствии с методом моментов (Красовский, 1968) из выражения (9) непосредственно следует, что оптимальное управление является константой и

$$u(t) \equiv \frac{1}{rT} \ln\frac{x_T}{x_0}. \qquad (11)$$

А. Задача на минимальные затраты

В соответствии с классификацией математических моделей, приведенной в статье «Принципові математичні моделі оптимального природокористування» (Чернишенко, 1998), задача (8), (2), (3), (10) представляет собой «задачу на минимальные затраты». В контексте проблемы рекультивации она может быть сформулирована следующим образом. При имеющемся объеме посадок, задаваемом равенством (2), необходимо за заданное время довести их объем до уровня (3), минимизируя при этом затраты на рекультивацию.

Приведем на примере модели (8) еще две возможные постановки задачи. Для обеих вместо критерия (10) задано ограничение на затраты:

$$I_0[u] \le M^2 \ . \qquad (12)$$

Б. Задача на быстродействие

При ограничениях (3),(12) необходимо минимизировать величину T, т. е. при имеющемся в начальный момент времени объеме посадок (2) нужно довести его до уровня (3) за минимально возможное время, не выходя за границы отпущенных средств.

Как показано в монографии Н.Н. Красовского (1968), оптимальное T можно найти из условия (12), в котором рассматривается случай равенства, а в качестве управления *u(t)* берется решение задачи на минимальные затраты.

Подставив выражение (11) в формулу (12), а затем полученное T – в формулу (11), получим решение задачи

$$T = \frac{1}{r^2 M^2} \ln^2 \frac{x_T}{x_0} \ ; \ u(t) \equiv r M^2 \ln^{-1} \frac{x_T}{x_0} \ .$$

В. Задача на эффективность

При выполнении условий (3), (12) необходимо максимизировать величину x_T. Иначе говоря, при ограничении (12) на затраты необходимо за заданный промежуток времени довести объем посадок до максимально возможного уровня.

Как было показано в статье С.В. Чернышенко (1984), вид оптимального управления не изменится по сравнению с задачей на минимальные затраты. Оптимальную величину x_T можно определить из выражения (12), где рассматривается случай равенства. В результате получим

$$x_T = x_0 e^{TrM}; \quad u(t) \equiv M \ .$$

Таким образом, для всех рассмотренных постановок задач оптимальное управление не зависит от времени, т.е. наиболее рациональным является равномерное по времени проведение мелиоративных работ.

3. Управление одномерной линейной моделью для случая создания искусственных биогеоценозов

Рассмотрим случай, когда рекультивация состоит в создании искусственного БГЦ и основным видом деятельности является заселение территории живыми организмами (при лесной рекультивации – путем лесопосадок). В этом случае основной управляющей функцией является *v(t).* Если не рассматривать одновременного управления путем изменения лесорастительных условий, модель (1) можно записать в виде

$$\dot{x} = a(t) \cdot x + v(t) \ . \qquad (13)$$

Может иметь место любой из случаев I–III, т. е. коэффициент роста *a(t)* по смыслу задачи может принимать как небольшие по модулю положительные (при экологическом соответствии биотопу), так и отрицательные (в противном случае) значения.

Рассмотрим задачу управления минимальными затратами (постановка А). Как и в предыдущем параграфе, используем квадратичный критерий (7) для оценки затрат на управление:

$$\min \int_0^T v^2(t)\, dt \ . \qquad (14)$$

Введем обозначение

$$E(t) = e^{-\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau} .$$

Подставив решение задачи (13), (2) в выражение (3), получим моментное соотношение

$$\int\limits_0^T v(t)E(t)\,dt = x_T\,E(T) - x_0 ,$$

откуда, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, получаем оптимальное управление

$$v(t) = \frac{x_T\,E(T) - x_0}{\int\limits_o^T E^2(t)}\,E(t).$$

Для $a\,(t) \equiv const$ может быть получена более простая формула:

$$v(t) = 2a\,\frac{x_T\,e^{-aT} - x_0}{1 - e^{-2aT}}\,e^{-at} = 2a\,\frac{x_T E - x_0}{1 - E^2}\,e^{-at} . \qquad (15)$$

Таким образом, при положительных $a\,(t)$, т.е. когда БГЦ имеет тенденцию к росту, основные затраты на лесопосадку и внедрение новых видов должны иметь место в начале процесса (если вместо (14) взять линейный критерий, оптимальное управление будет являться δ-функцией, т. е. затраты будут сосредоточены в начальный момент времени; квадратичный критерий приводит к более равномерному распределению усилий, убывающих по экспоненте). Это вполне логично, поскольку ранее внесенные особи обеспечат естественный прирост БГЦ к концу рассматриваемого периода. При отрицательных $a\,(t)$ имеет место обратная картина, которая, впрочем, не может иметь практического смысла, поскольку рекомендации в этом случае неизбежно имеют спекулятивный характер – целесообразно проводить посадки как можно позднее, с тем чтобы они как можно меньше деградировали к концу рассматриваемого периода. Здесь проявляется ограниченность математической постановки задачи – динамика БГЦ после момента T не принимается во внимание.

Для случая (15) запишем значение затрат

$$2a\,\frac{\left(x_T\,e^{-aT} - x_0\right)^2}{1 - e^{-2aT}} = F(E) = 2a\,\frac{\left(x_T\,E - x_0\right)^2}{1 - E^2} .$$

Как и ранее, решение задачи *Б* о предельном быстродействии (для которой вместо (14) рассматриваем условие типа (12)) ищем из условия

$$2a\,\frac{\left(x_T e^{-aT} - x_0\right)^2}{1 - e^{-2aT}} = M^2 . \qquad (16)$$

Рассмотрим вначале уравнение $F(E) = M^2$. Примем естественные предположения о том, что $a > 0$ и $x_T > x_0$. Нас будет интересовать наибольший корень уравнения (которому будет соответствовать наименьшее T) на промежутке (0, 1). Можно показать, что таким корнем (причем большим, чем x_0 / x_T) будет

$$E = \frac{x_0 x_T + \mu\sqrt{x_T^2 + \mu^2 - x_0^2}}{x_T^2 + \mu^2} , \quad \text{где } \text{ì}^2 = \frac{M^2}{2a} .$$

Оптимальное управление определяется из (15), а время быстродействия:

$$T = \frac{1}{a}\left(\ln\left(x_T^2 + \mu^2\right) - \ln\left(x_0 x_T + \mu\sqrt{x_T^2 + \mu^2 - x_0^2} \right)\right).$$

Решение задачи *B* на эффективность легко находится из формулы (16):

$$x_T = x_0\, e^{aT} + M\sqrt{\frac{e^{2aT} - 1}{2a}} \;.$$

Оптимальное управление для этого случая также определяется из формулы (15):

$$v(t) = M\sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}\; e^{-at} \,.$$

4. Смешанная задача для одномерной модели

Вернемся к рассмотрению задачи (1) – (4). Как уже отмечалось, точное аналитическое решение этой задачи найти не удается. Поскольку, как обсуждалось в начале статьи, в практических задачах экологии оптимальность не всегда обязательна (что тем более приложимо к случаю использования качественных эскизных моделей), рассмотрим один из подходов к определению «рационального» управления, не лучшего вообще, но наилучшего в своем классе.

При анализе ситуации, когда одновременно ведутся лесопосадочные и лесокультурные работы, воспользуемся результатами исследования этих двух видов управления в отдельности. Как показал проведенный выше анализ, лесокультурные и мелиоративные работы рационально проводить равномерно, а интенсивность лесопосадочных работ менять по экспоненциальному закону. Если приложить эти законы к случаю одновременного проведения этих работ, модель (1) можно записать в виде

$$\dot{x} = (u - a)\cdot x + w\cdot E(t) \,, \tag{17}$$

где

$$E(t) = e^{-(u-a)t} \,.$$

Константы u и w считаются управляющими, и ставится задача определения их положительных значений, минимизирующих критерий качества (4), который принимает вид

$$u\int_0^T x(t)\,dt + w\int_0^T E(t)\,dt \,. \tag{18}$$

При этом должно выполняться условие (3).

Из выражений (17), (2)

$$x(t) = E^{-1}(t)\left(x_0 + w\,\frac{1 - E^2(t)}{2(u-a)} \right). \tag{19}$$

Подставив выражение (19) в ограничение (3), можем выразить w через u:

$$w = 2(u-a)\,\frac{x_T\,E(T) - x_0}{1 - E^2(T)} \,. \tag{20}$$

Из требования положительности следует ограничение на u:

$$u \le a + \frac{1}{T}\ln\frac{x_T}{x_0} \,.$$

Из выражения (19) и (20) можно получить равенство

$$\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{(u-a)}\,\frac{1-E(T)}{1+E(T)}\,(x_0 + x_T)\,. \tag{21}$$

Подставив выражения (20), (21) в (18), получим критерий для определения u:

$$\min_{0 \le u \le a + \frac{1}{T}\ln\frac{x_T}{x_0}} \left[\frac{u}{(u-a)}\,\frac{1-E(T)}{1+E(T)}(x_0 + x_T) + 2\,\frac{x_T E(T) - x_0}{1+E(T)} \right],$$

который, после эквивалентных преобразований, может быть приведен к более простому виду

$$\min_{o \le u \le a + \frac{1}{T}\ln\frac{x_T}{x_0}} \left[\frac{1}{u-a}\,\frac{1-E(T)}{1+E(T)} \right]. \tag{22}$$

Целевая функция имеет единственную экстремальную точку $u = a$, однако можно показать, что ее значение в этой точке всегда превосходит (и лишь при $x_T = x_0$ равно) значение в граничной точке $v = 0$. Поэтому решение задачи получаем, рассматривая лишь граничные точки:

$$u = 0, \qquad v = 2a\,\frac{x_T e^{at} - x_0}{e^{at} - 1} \qquad \text{при} \qquad \frac{1}{a}\,\frac{e^{aT} - 1}{e^{aT} + 1} < \frac{T}{\ln x_T - \ln x_0}\,\frac{x_T - x_0}{x_T + x_0}\,,$$

$$u = a + \frac{1}{T}\ln\frac{x_T}{x_0}, \qquad v = 0 \qquad \text{при} \qquad \frac{T}{\ln x_T - \ln x_0}\,\frac{x_T - x_0}{x_T + x_0} < \frac{1}{a}\,\frac{e^{aT} - 1}{e^{aT} + 1}\,.$$

Таким образом, из линейного критерия (18) следует, что сочетание двух видов рекультивационных работ не может быть оптимальным. Это соответствует известной «экстремальности» управлений в случае линейного критерия, о чем упоминалось выше.

Использование критерия с весовыми коэффициентами (5) приводит к несколько более сложной, чем (22), целевой функции:

$$\min_{o \le u \le a + \frac{1}{T}\ln\frac{x_T}{x_0}} \left[\frac{(\alpha_u - \alpha_v)\,u + \alpha_v a}{u-a}\,\frac{1-E(T)}{1+E(T)} \right]. \tag{23}$$

Исследование критерия (23) показывает, что при $a_u >> a_v$ оптимальным является $u = 0$ (что вполне естественно, так как в этом случае рекультивация за счет лесокультурных мероприятий считается существенно более дорогой, чем за счет лесопосадок), а при $a_u << a_v$ оптимальным будет u, равное верхней границе интервала. Как и в предыдущем случае, оптимальное u не может принимать промежуточных значений и при некотором соотношении между a_u и a_v «переключается» с одного значения на другое.

Непрерывную зависимость параметров оптимизации от других параметров модели можно получить, если использовать квадратичный критерий. Для рассматриваемой задачи критерий (7) принимает вид

$$\min_{o \le u \le a + \frac{1}{T}\ln\frac{x_T}{x_0}} \left[\alpha_u u^2 + 4\alpha_v \left(\frac{x_T E(T) - x_0}{1+E(T)} \right)^2 \right]. \tag{24}$$

Уравнение для определения стационарных точек можно записать в виде

$$u = \frac{4\alpha_v\,(x_T + x_0)x_T}{\alpha_u T}\,\frac{(E(T) - x_0/x_T)E(T)}{(E(T)+1)^3}\,. \tag{25}$$

Функция в правой части (25) является монотонно убывающей функцией u на промежутке определения этой переменной, причем на его правой границе она принимает нулевое значение. Следовательно, уравнение (25) имеет на этом промежутке одно и только одно решение. Можно показать, что оно всегда является искомым решением задачи (24).

В соответствии со смыслом критерия (7) оптимальное u будет увеличиваться с ростом a_v и уменьшаться с ростом a_u. Вообще, постоянный коэффициент в правой части (25) оказывает решающее влияние (наряду с отношением x_0 / x_T) на величину оптимального управления. Лесокультурные мероприятия оказываются более выгодными в менее сложных случаях (когда T мало или отношение x_0/x_T близко к единице), а также если объем существующих посадок уже значителен. В противном случае более эффективными оказываются лесопосадочные работы. Величина P_u, определяемая формулой

$$P_u = \frac{\alpha_v (x_T + x_0) x_T}{\alpha_u T},$$

может служить для грубой оценки целесообразности проведения лесопосадочных работ.

5. Некоторые постановки задач управления для нелинейных моделей

В настоящей статье для более сложных нелинейных моделей, обобщающих модель (1), ограничимся рассмотрением постановок задач. Решение этих задач может стать предметом отдельного исследования. Приведем несколько одномерных нелинейных моделей рекультивационного процесса. Начальное и конечное состояния системы, как и ранее, определяются формулами (2) и (3). В каждом случае обсуждается вид модели и критерий качества, на их основе могут быть легко сформулированы задачи *А*, *Б* и *В*.

5.1. Как известно (Мэйнард Смит, 1974), модель неограниченного роста (1) хорошо описывает развитие популяций при малых численностях и непригодна при численностях, близких к равновесным. Лимитирование биомассы популяции (или БГЦ в целом) как результат ограниченной емкости экологической ниши (для БГЦ – емкости среды) в математической экологии описывают обычно логистическим уравнением

$$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)x .$$

Здесь r – коэффициент, оценивающий скорость роста БГЦ при малых численностях (его «репродуктивный потенциал»), а K – равновесная биомасса, к которой стремится БГЦ в данном местообитании.

Можно считать, что управление путем мелиорации или проведения лесокультурных мероприятий приводит к улучшению лесорастительных условий и соответственно к увеличению емкости среды. Рассмотрим два случая.

5.1.1. В первом случае предполагаем, что коэффициент роста БГЦ линейно зависит от интенсивности $u(t)$ рекультивационных мероприятий и может неограниченно расти с ростом u:

$$\frac{dx}{dt} = r\left(a + u(t) - \frac{x}{K}\right)x .$$

Емкость среды определяется как $(a + u)K$. При $a > 0$ БГЦ может развиваться и без рекультивационных работ, однако при их проведении равновесную численность можно увеличить. Эта ситуация соответствует варианту III для модели (1). При $a = 0$ развитие БГЦ возможно лишь при его поддержания путем рекультивации, что соответствует варианту II.

5.1.2. Во втором случае предполагаем, что хотя коэффициент роста и увеличивается при увеличении u, его значение при $u \to \infty$ стремится к величине r, характеризующей максимальные репродуктивные возможности БГЦ. Простейшей функцией, качественно описывающей такое поведение, является гипербола. Модель приобретает вид

$$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{a + u(t)}\right)x . \qquad (26)$$

Емкость среды составляет ($a + u$). Случай $a > 0$ соответствует случаю III для модели (1), т. е. БГЦ может существовать и без рекультивации. Случай $a = 0$ соответствует случаю II, при котором БГЦ может развиваться только в условиях непрекращающихся рекультивацонных работ. Другими словами можно сказать, что в модели (26) управляющим параметром служит емкость среды.

При постановке задачи оптимального управления об увеличении биомассы БГЦ с величины (2) до величины (3) может использоваться критерий качества типа (3) или же функционал

$$I\,[u] = \int_0^T c(t)\,u(t)\,dt\ . \tag{27}$$

Здесь $c\,(t)$ – положительная функция, задающая стоимость рекультивационных работ в момент времени t.

Решение задачи (26), (2), (3), (27) для $a = 0$ рассмотрено в наших статьях (Чернышенко, 1984; 1998).

5.1.3. При управлении путем лесонасаждений модель процесса может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)x + v(t)\ . \tag{28}$$

Динамика модели (28) соответствует случаю III, т. е. БГЦ может существовать и при отсутствии рекультивации. При $r < 0$ структура логистической модели становится бессмысленной; кроме того, при регрессивном развития БГЦ емкость среды полностью определяется интенсивностью рекультивации, и «пограничные эффекты» при ее исчерпании отсутствуют. Поэтому в случае I вместо (28) естественнее использовать модель типа (1).

Зависимость емкости среды от управления может быть выражена формулой

$$x^* = \frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} + \frac{Kv}{r}}\ .$$

Для оценки качества управления могут использоваться функционалы типа (4) или (14).

5.2. Перспективным для описания рекультивации представляется использование модели развития во враждебной среде (Чернышенко, 2002):

$$\dot{x} = r\left(1 - \left(\frac{2x - K - C}{K - C}\right)^2\right)x\ . \tag{29}$$

В отличие от логистической модели, которая имеет одно устойчивое (равное K) и одно неустойчивое (нулевое) положение равновесия, модель (29) имеет два устойчивых (K и нулевое) и одно неустойчивое (C) положения равновесия. То, в какое из устойчивых положений равновесия попадет БГЦ, зависит от ее текущей биомассы x. Если это значение меньше C, то биомасса будет стремиться к нулю, если больше – точкой притяжения окажется K. При $C = 0$ динамика уравнения (29) сходна с динамикой обычного логистического уравнения.

Уравнение (29) описывает ситуацию, когда при малой биомассе БГЦ не может существовать, для успешного развития ему нужно достичь некоторого критического уровня, задаваемого параметром C. В качестве «враждебной среды» выступают неблагоприятные абиотические условия. Биогеоценоз должен иметь некоторую начальную биомассу, достаточную, чтобы достичь необходимого для дальнейшего развития средообразующего эффекта.

5.2.1. Предполагая, как и в случае 1.1, коэффициент роста БГЦ линейно зависимым от интенсивности рекультивации, можем записать модель (29) в виде

$$\dot{x} = r\left(a + u(t) - \left(\frac{2x - K - C}{K - C}\right)^2\right)x . \tag{30}$$

Емкость среды определяем как

$$x = (K + C) + \sqrt{a+u}\,(K - C) ,$$

однако не при любом управлении система будет стремиться к этому положению равновесия. При низкой интенсивности рекультивационных работ u, когда

$$u < \left(\frac{K + C}{K - C}\right)^2 - a ,$$

БГЦ будет развиваться и стремиться заполнить экологическую нишу лишь при

$$x > (K + C) - \sqrt{a+u}\,(K - C) ,$$

при меньших же начальных численностях БГЦ будет регрессировать даже в случае непрерывной рекультивации.

5.2.2. Аналогично пункту 1.2 рассмотрим случай, когда при любой интенсивности рекультивации скорость роста БГЦ ограничена некоторой экологически детерминированной величиной r.

Учитывая, что $K > C$, управление введем с помощью формулы

$$K = C + a + u(t) .$$

В дальнейшем возможны два подхода к управлению моделью (30).

5.2.2.1. Можно, при фиксированном C, изменять K, т.е. влиять на емкость среды, не изменяя порог, начиная с которого БГЦ способен к саморазвитию. В этом случае уравнение системы приобретает вид

$$\dot{x} = r\left(1 - \left(\frac{2x - a - u(t) - 2C}{a + u(t)}\right)^2\right)x . \tag{31}$$

Емкость среды определяется формулой

$$x = \mathrm{C} + a ,$$

а для успешного развития БГЦ, как и в случае модели (30), необходимо достичь критической биомассы $x = C$.

5.2.2.2. В другом случае можно ставить задачу о повышении устойчивости рекультивируемого БГЦ при неизменной емкости среды. То есть величина K считается фиксированной, а оптимизируется величина порога C. Можно показать, что эта задача сходна с задачей о повышении устойчивости экологической системы, рассмотренной Чернышенко и др. (1998), хотя и принципиально отличается от последней используемым математическим подходом.

Модель можно записать в виде

$$\dot{x} = r\left(1 - \left(\frac{2x - 2K + a + u(t)}{a + u(t)}\right)^2\right)x .$$

Устойчивое равновесное состояние системы $x = K$ является таким же, как и у модели (30), а пороговое значение начальной численности определяется формулой

$$x = K - a .$$

Для всех случаев 2.1, 2.2, 2.3 в качестве критериев качества могут выступать функционалы (3) или (27).

5.2.3. При управлении путем лесонасаждений на основе модели (30) задача приобретает вид

$$\dot{x} = r\left(1-\left(\frac{2x-K-C}{K-C}\right)^2\right)x + v(t)\ . \tag{32}$$

Здесь, как и в пункте 1.3, естественно принять $r > 0$. В качестве критерия качества можно применить выражения (4) или (14).

При $v \neq 0$ среди трех положений равновесия уравнения (21) ни один не равен нулю, что затрудняет их поиск (необходимо решать кубическое уравнение). Естественно, при малых n наблюдается тот же эффект «переключения», что и в случае модели (30).

Может быть рекомендована комбинация двух моделей. Вначале рассматривается модель (32) процесса лесонасаждений, а затем, после превышения критической величины C, модель (31) повышения емкости среды.

6. Постановка задачи управления для двумерной линейной модели

Модель (1) может быть обобщена на многомерный случай. Это целесообразно в первую очередь при моделировании процесса одновременной рекультивации нескольких БГЦ. В этом случае кроме планирования рекультивационных работ в каждом районе стоит задача о распределении средств между несколькими процессами. Начальное и конечное состояния системы определяются многомерными аналогами соотношений (2) и (3):

$$\begin{cases} x_1(0) = x_1^{(0)}\ , \\ x_2(0) = x_2^{(0)}\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(T) = x_1^{(T)}\ , \\ x_2(T) = x_2^{(T)}\ . \end{cases} \tag{33}$$

Выбрав критерий качества, можно ставить для модели задачу *А* или задачу *Б* (но не *В*, которая имеет смысл лишь в одномерном случае).

Ограничимся рассмотрением двумерных моделей с функционалом качества типа (10):

$$I_0[u_1,u_2] = \int\limits_0^T \left[u_1^2(t)+u_2^2(t)\right]dt\ . \tag{34}$$

Будем считать, что имеется некоторый фиксированный ресурс, выделенный для рекультивации. Пусть его величина может изменяться во времени и задается функцией $f(t)$. Распределение этого ресурса между двумя процессами рекультивации определяется значением параметра λ:

$$0 \le \lambda \le 1\ ,$$

который будем считать управляющим. Кроме фиксированного ресурса возможно использование дополнительных ресурсов, которые оцениваются управляющими функциями $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

Если рассмотреть задачу о рекультивации путем улучшения лесорастительных условий, получим на основе модели (8) систему

$$\begin{cases} x_1 = a_1\left[\lambda f(t) + u_1(t)\right]x_1\ , \\ x_2 = a_2\left[(1-\lambda) f(t) + u_2(t)\right]x_2\ . \end{cases} \tag{35}$$

Задача *А* состоит в переводе системы (35) из состояния $x^{(0)}$ в состояние $x^{(T)}$ (условие (33)) путем выбора управляющего параметра l и управляющих функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ таким образом, чтобы затраты, задаваемые функционалом (34), оказались минимальными. То есть ставится задача об оптимальном распределении имеющихся ресурсов и привлечении минимально возможных дополнительных средств для достижения необходимого уровня развития обоих рекультивируемых БГЦ.

Задача *Б* заключается в выборе управляющих функций и параметра λ таким образом, чтобы перевести систему в заданное состояние $x^{(T)}$ за минимально возможное время *T*. При этом на управление наложено ограничение вида (12). Таким образом, необходимо довести биомассу рекультивируемого БГЦ до заданной величины, не выходя за границы отпущенных средств. Подобная задача уже была рассмотрена нами (Чернышенко, 1980).

Аналогичные задачи можно поставить и для модели типа (13), описывающей рекультивацию путем лесопосадок:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(t)\,x_1 + \lambda\, f(t) + v_1(t)\ , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2(t)\,x_2 + \left(1-\lambda\right) f(t) + v_2(t)\ . \end{cases}$$

Качество управления может оцениваться функционалом типа (6) или, в частном случае, аналогичным форме (34).

Выводы и перспективы дальнейших исследований

В статье показано место задач об оптимизации затрат на рекультивацию среди существующих оптимизационных проблем. Рассмотрены различные постановки задач управления (о минимизации затрат, о предельном быстродействии, о максимальной эффективности). Для линейной модели приведены решения задач, для нелинейных и многомерных моделей обсуждены возможные постановки оптимизационных проблем.

Предметом дальнейших исследований может стать решение сформулированных задач, а также уточнение и развитие математических моделей процесса лесной рекультивации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Арманд Д.Л. Географическая среда и рациональное использование природных ресурсов. – М.: Наука, 1983. – 228 с.

Беллман Р. Математические методы в медицине. – М.: Мир, 1987. – 200 с.

Бельгард А.Л. Лесная растительность юго-востока УССР. – К.: КГУ, 1950. – 264 с.

Бельгард А.Л., Травлеев А.П. О процессах адаптации и сильватизации искусственных лесных биогеоценозов к условиям степной среды // Проблемы лесного почвоведения. – М.: Наука, 1973. – С. 5-15.

Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества. – М.: Мир, 1989. – Т. 1. – 668 с.

Ван Рийн М. О некоторых теоретических и методических аспектах проблемы окружающей среды // Экономическая и внеэкономическая оценка воздействия человека на окружающую среду. – М.: Наука, 1981. – С. 80-83.

Вопросы оптимизации техногенных ландшафтов Западного Донбасса путём создания мелиоративных и рекреационных лесных насаждений / Н.А. Белова, М.А. Альбицкая, В.Н. Зверковский и др. // Биогеоценологические аспекты лесной рекультивации нарушенных земель Западного Донбасса. – Д.: ДГУ,1980. – С. 21-38.

Голубець М.А. Поняття «оптимізації» в екології // Ойкумена. – 1994, № 1-2. – С. 153-159.

Динамическая теория биологических популяций / Под ред. Р.А.Полуэктова. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

Дриженко А.Ю. Восстановление земель при горных разработках. – М.: Недра, 1985. – 240 с.

Етеревская Л.В. Рекультивация земель – К.: Урожай, 1977. – 124 с.

Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

Крупеников И.А., Холмецкий А.М. Некоторые проблемы рекультивации земель. – М.: Знание, 1979. – 48 с.

Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. – К.: Вища шк., 1999. – 236 с.

Ляшенко І.М., Мукоєд А.П. Моделювання біологічних та екологічних процесів. – К.: КДУ, 2002. – 340 с.

Миркин Б.М., Розенберг Г.С. Фитоценология: принципы и методы. – М.: Наука, 1978. – 212 с.

Миркин Б.М., Розенберг Г.С., Наумова Л.Г. Словарь понятий и терминов современной фитоценологии. – М.: Наука, 1989. – 224 с.

Мыцык Л.П. Понятие о коренном и фактическом типах увлажнения местообитания // Кадастровые исследования степных биогеоценозов Присамарья Днепровского, их антропогенная динамика и охрана. – Д.: ДГУ, 1991. – С. 74-79.

Мэйнард Смит Дж. Модели в экологии. – М.: Мир, 1974. – 184 с.

Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 342 с.

Одум Ю. Основы экологии. – М.: Мир, 1975. – 740 с.

Перлин С.И. О возможности применения теоретических основ и методов экологической типологии земель в работах по рекультивации нарушенных земель // Кадастровые исследования степных биогеоценозов Присамарья Днепровского, их антропогенная динамика и охрана. – Д.: ДГУ, 1991. – С. 61-73.

Раменский Л.Г. Введение в комплексное почвенно-геоботаническое исследование земель. – М., 1938.

Раменский Л.Г., Цаценкин И.А., Чижиков О.Н. Экологическая оценка кормовых угодий по растительному покрову. – М.: Гос. изд-во сельхоз. лит., 1956. – 472 с.

Свирежев Ю.М., Елизаров Е.Я. Математическое моделирование биологических систем // Проблемы космической биологии. – М.: Наука, 1972. – Вып. 20. – 159 с.

Таран Н.Д. Пойменные леса в условиях шахтных подработок. – Д.: ДГУ, 1992. – 172 с.

Тимченко И.Е., Игумнова Е.М., Прималенный А.А. Управление эколого-экономическими системами. – Севастополь: Гидрофизика, 1999. – 180 с.

Травлеев А.П. Состояние и перспективы исследований лесных биогеоценозов на землях, нарушенных промышленностью // Охрана и рациональное использование защитных лесов степной зоны. – Д.: ДГУ, 1987. – С. 4-11.

Форрестер Д. Мировая динамика. – М.: Наука, 1978. – 160 с.

Чернышенко С.В. Оптимальное управление численностью популяций при ограниченных ресурсах // Актуальные проблемы ЭВМ и программирования. – Д.: ДГУ, 1980. – С. 132-136.

Чернышенко С.В. Некоторые задачи оптимального управления численностью особей в изолированных популяциях // Алгоритмы решения нелинейных задач и обработка данных. – Д.: ДГУ, 1984. – С. 139-146.

Чернишенко С.В. Принципові математичні моделі оптимального природокористування // Питання степового лісознавства та лісової рекультивації земель. – Д.: ДДУ, 1998. – С. 78-82.

Чернышенко С.В. Математическая теория сукцессионных смен: сукцессии ингибирования и толерантности // Вісник Дніпропетровського університету. Біологія. Екологія. – Д.: ДНУ, 2001. – Т. 9, вып. 2. – С. 204-215.

Чернышенко С.В. Сукцессионные смены облегчения: математическая модель с гистерезисом // Екологія та ноосферологія. – 2002. – Т. 11, № 1-2. – С. 110-119.

Чернышенко С.В., Черная Н.А., Шестопалова Е.Н. О стабилизации конкурентных межвидовых отношений для вольтерровских систем с неограниченным ростом // Екологія та ноосферологія. – 1998. – Т. 4, № 1-2. – С. 137-140.

Эндрэс А. Экономика окружающей среды. – К.: Либідь, 1995. – 167 с.

Надійшла до редколегії 25.04.03